ÉNONCÉ

k corps. $Tr_n(k)$: { mat transvect }

$Dil_n(k)$: { mat dilat }

1. TM : $GL_n(k) = \langle Tr_n(k), Dil_n(k) \rangle$

$SL_n(k) = \langle Tr_n(k) \rangle$

2. CORR : k corps infini. $GL_n(k)$ est engendré par les mat dz inversibles.

3. APPLI : A) $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $SL_n(k)$ est connexe par arcs.

B) $GL_n(\mathbb{R})$ a 2 compo connexes $GL_n^-(\mathbb{R})$ et $GL_n^+(\mathbb{R})$.

LEÇONS.

106 **1. 3.**

108 **1. 2 3.** A)

162 **1. 3.**

RÉFS.

1. 2. [FGN2] Francinou Gianella Nicolas Algèbre 2 p- 177-179.

3. PAS DE RÉF !

RÉSULTATS ASSOCIÉS

DÉMO

// : à l'oral. // : pour comprendre.
// écrit au tableau. // : structure

1.

déf ≤ engendré.

⊂ On remarque que $\langle Tr_n(K) \rangle \subset Sl_n(K)$ (triag avec des 1 sur diago)

$\langle Dil_n(K) \rangle \subset Gl_n(K)$ (diago avec 1 et $\alpha \neq 0$ sur diago)

⊃ On appli pivot de Gauss pr transfo 1 mat de $Gl_n(K)$ en 1 mat dilat en use transvect

C'est un algo itératif : On rais par récurrence.

Posons $\mathcal{H}(n)$: " si $A \in Gl_n(K)$. $\exists T, Q \in Tr_n(K)$ $TAQ = \overbrace{D_n(\alpha)}^{= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \alpha \end{bmatrix}}$ " $n \in \mathbb{N}^*$.

(I) $n = 1$: ok.

(H) supposons $\mathcal{H}(p)$ vraie $1 \leq p \leq n-1$.

Soit $A = [C_1 | \dots | C_n] = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = (a_{ij})_{ij} \in Gl_n(K)$.

On a $C_1 \neq 0$ car $A \in Gl_n$ donc $rg = n$.

On cherche le pivot sur cette ligne.

ÉTAPE 1 : se ramener à un pivot = 1 sur le 1e coeff.

CAS 1 : si $\exists i \geq 2$, $a_{i1} \neq 0$.

+ compliqué car $L_i \leftrightarrow L_j$ need permut et pas transvect.

On veut $a_{11} \leftarrow 1 = a_{11} - \frac{(a_{11} - 1)}{a_{i1}} a_{i1}$

On fait $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{(a_{11} - 1)}{a_{i1}} L_i$.

↳ $a_{11} \leftarrow a_{11} - \frac{(a_{11}-1)}{a_{i1}} a_{i1} = 1$.

opé élem + lignes revient à mul gauche par mat transvect.

$A \sim \left[\begin{matrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x \end{matrix} \middle| A_2 \middle| \dots \middle| A_n \right]$

se l'utilise pr signaler × mat transv.

CAS 2 : si $a_{i1} = 0$ $\forall i \geq 2$: On veut se ramener au cas 1.

* on ne fait pas $L_1 \leftarrow \frac{L_1}{a_{11}}$ car on veut slmt transvect.

On a $a_{11} \neq 0$ (inversible ⇒ $C_1 \neq 0$)

on veut $a_{21} \neq 0$.

⚠ pas opé corresp.

On fait $L_2 \leftarrow -L_1$ ie

produit transvect à priori : décomp.

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ $(l_1 = l_1 + l_2)$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ $(l_2 = -l_1)$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ $(L_1 = l_2)$

ÉTAPE 2 : faire app des 0.

On veut $\begin{cases} a_{1i} \leftarrow 0 \\ a_{i1} \leftarrow 0 \end{cases}$ $\forall i \in [\![2, p]\!]$.

- On fait $\forall i \in [\![2,p]\!]$, $L_i \leftarrow L_i - a_{i1} L_1$ fait app 0 sur 1e col

$C_i \leftarrow C_i - a_{1i} C_1$. fait app 0 sur 1e ligne.

On obtient $A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\tilde{A}} \\ 0 & \end{bmatrix}$

ÉTAPE 3 :

Par HR appliquée à $\tilde{A}$, (en fait on répète le même algo)

$\tilde{A} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & \alpha \end{bmatrix}$

BILAN : $\exists\, T, Q \in Tr_n(\mathbb{K})$,

$TAQ = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \alpha \end{bmatrix}$ On Rq que : $\alpha = \det(A)$. car T et Q de $\det = 1$

les T et Q sont des produits de transvections aux opés des étapes 1 et 2 et à des mat construites par blocs à partir des mat transvect ussed pr transfo A_1

Ex : $B_1 A_1 S_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \ \alpha \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$ $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{bmatrix}$

$BAS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B_1 A_1 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B_1 A_1 S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \ \alpha \end{bmatrix}$

Donc $\mathcal{H}(n)$ vraie.

Donc $\forall A \in Gl_n(\mathbb{K})$, $\exists\, U, V \in \underbrace{Tr(n)}_{\text{inverses de } T \text{ et } Q \text{ avec not préc.}}$, $A = U D_n(\det(A)) V$. $\alpha = \det(A)$ car trig sup et les autres coeffs $= 1$.

Donc $Gl_n(\mathbb{K}) = \langle Tr_n(\mathbb{K}), Dil_n(\mathbb{K}) \rangle$

$Sl_n(\mathbb{K}) = \langle Tr_n(\mathbb{K}) \rangle$ car $D_n(1) = I_n$.

2. <u>Mq</u> $Gl_n(k) = \langle \underbrace{\{\text{matrices diagonalisables inversibles}\}}_{\mathcal{D}} \rangle$ (108)

met classique pr passer syst géné à un centre.

On a par **1.** que $Gl_n(k) = \langle$ transvect, dilat$\rangle$. Il suffit de mq ses géné s'écrivent comme produit de mat diagonalisables

- $Dil_n(k) \subset \mathcal{D}$. donc diagonalisables. + inv.

- Soit $M \in Tr_n(k)$.

Pr que ce soit diagonalisable, il faut par ex que possède n vp ≠.
comme elle est triag sup, ses vp sont ses coeffs diago.
On va mul M par 1 mat diagonalisable pr changer ses coeffs diago.
La manière + simple est de choisir 1 mat diagonale avec n vp distinctes ≠ 0.

$M = D^{-1}(\underset{\sim}{DM})$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$

$= \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & 2 & \\ & & \ddots \\ & & & n \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ car a n valeurs propres distinctes (≠0)

Donc $M \in \mathcal{D}$.

Donc $Gl_n(k) = \langle Tr_n(k), Dil_n(k) \rangle \subset \langle \mathcal{D} \rangle$.

3. <u>appli à la connexité</u>:

① <u>$Sl_n(k)$</u>

Soit $A \in Sl_n(k)$.

Par **1**, $A = T(\lambda_1) \dots T(\lambda_k)$, $T(\lambda_i) \in Tr_n(k)$ $\forall i$.

Soit $\gamma : t \in [0,1] \mapsto T(t\lambda_1) \dots T(t\lambda_k) \in Sl_n(k)$

γ est continu. $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = A$.

Donc $Sl_n(k)$ connexe par arcs car c'est un groupe

relier I_n à A c'est relier ~~tt~~ mat à A.

pas 108.

② <u>$Gl_n(\mathbb{R})$</u>:

$\underbrace{\det}_{\text{continue}}(Gl_n(\mathbb{R})) = \underbrace{\mathbb{R}^*}_{\text{non connexe}}$ donc $Gl_n(\mathbb{R})$ non connexe

<u>Mq</u> $Gl_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in Gl_n(\mathbb{R}), \det(M) > 0\}$ connexe.

on se ramène à $Sl_n(\mathbb{R})$.

. Soit $M \in Gl_n^+(\mathbb{R})$. ok car inversible.

$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \det(M)^{-1} \end{pmatrix}$

D faite pr ça

$MD \in Sl_n(\mathbb{R})$ donc $\exists \alpha : [0,1] \to Sl_n(\mathbb{R})$ conti $\alpha(0) = I_n$, $\alpha(1) = MD$.

$\gamma : \begin{cases} [0,1] \to Gl_n^+(\mathbb{R}) \\ t \mapsto \alpha(t)\,(I_n(1-t) + tD^{-1}) \end{cases}$ conti $\gamma(0) = I_n$, $\gamma(1) = D$.

De m̂, $Gl_n^-(\mathbb{R})$ connexe. même raison avec $D = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -\det(M) \end{bmatrix}$